

2024 秋季初三数学每日一题打卡 007

007 试题来源：2024 春无锡锡山区期中第 28 题

如图 1，二次函数 $y = ax^2 + 2ax + 3$ 的图象与 x 轴交于点 A 、 B ，与 y 轴交于点 C ，且 $OA = OC$ 。点 P 为抛物线第二象限上一动点。

- (1) 直接写出该二次函数的表达式为_____；
- (2) 连接 PA 、 PC 、 BC ，求四边形 $ABCP$ 面积的最大值；
- (3) 如图 2，连结 BP 交 AC 于点 H ，过点 P 作 y 轴的平行线交 AC 于点 Q 。当 $\triangle PQH$ 为等腰三角形时，求出点 P 的坐标。

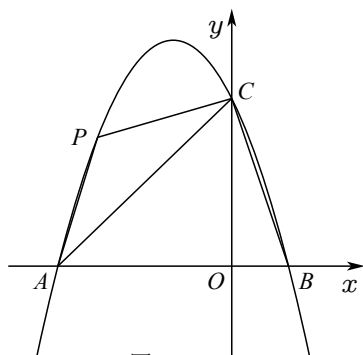


图1

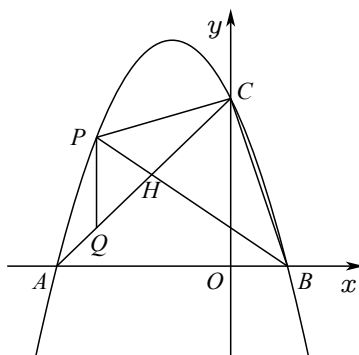


图2

试题解析

如图1,二次函数 $y = ax^2 + 2ax + 3$ 的图象与 x 轴交于点 A 、 B ,与 y 轴交于点 C ,且 $OA = OC$. 点 P 为抛物线第二象限上一动点.

(1) 直接写出该二次函数的表达式为 $y = -x^2 - 2x + 3$;

(1) $OA = OC = 3$, 则点 $A(-3, 0)$,

将点 A 的坐标代入抛物线表达式得: $0 = 9a - 6a + 3$, 解得: $a = -1$,

则抛物线的表达式为: $y = -x^2 - 2x + 3$, 故答案为: $y = -x^2 - 2x + 3$;

(2) 连接 PA 、 PC 、 BC , 求四边形 $ABCP$ 面积的最大值;

解: (2) 如图2,

由点 A 、 C 的坐标得, 直线 AC 的表达式为: $y = x + 3$,

设点 $P(m, -m^2 - 2m + 3)$, 则点 $Q(m, m + 3)$,

则 $PQ = -m^2 - 2m + 3 - m - 3 = -m^2 - 3m$,

则四边形 $ABCP$ 面积 $= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} \times AB \times CO + \frac{1}{2} \times PQ \times AO = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 + \frac{1}{2} \times (-m^2 - 3m) \times 3 = \frac{3}{2}(-m^2 - 3m) + 6$,

$\because -\frac{3}{2} < 0$,

故四边形 $ABCP$ 面积存在最大值,

当 $m = -\frac{3}{2}$ 时, 四边形 $ABCP$ 面积的最大值为 $\frac{75}{8}$;

(3) 如图2, 连结 BP 交 AC 于点 H , 过点 P 作 y 轴的平行线交 AC 于点 Q . 当 $\triangle PQH$ 为等腰三角形时, 求出点 P 的坐标.

(3) 如果 $PH = PQ$, 则 $\angle PHQ = 45^\circ$, 则 $\angle QPH = 90^\circ$, 故 $PH = PQ$ 不存在; 当 $PH = QH$ 时, 则点 H 在 PQ 的中垂线上, 则 $y_H = \frac{1}{2}(y_P + y_Q)$, 即可求解; 当 $PQ = QH$ 时, 即 $\sqrt{2}(\frac{m}{m+4} - m) = -m^2 - 3m$, 即可求解.

【解答】(3) 设点 $P(m, -m^2 - 2m + 3)$, 则点 $Q(m, m + 3)$,

由点 B 、 P 的坐标得, 直线 BP 的表达式为: $y = -(m+3)(x-1)$,

联立上式和直线 AC 的表达式得: $-(m+3)(x-1) = x+3$,

解得: $x_H = \frac{m}{m+4}$, 则点 H 的坐标为: $(\frac{m}{m+4}, \frac{m}{m+4} + 3)$,

由直线 AC 的表达式知, 其与 x 轴正半轴的夹角为 45° ,

如果 $PH = PQ$, 则 $\angle PHQ = 45^\circ$, 则 $\angle QPH = 90^\circ$, 故 $PH = PQ$ 不存在,

则 $QH = \sqrt{2}(x_H - x_Q) = \sqrt{2}(\frac{m}{m+4} - m)$, 而 $PQ = -m^2 - 3m$,

当 $PH = QH$ 时, 则点 H 在 PQ 的中垂线上, 则 $y_H = \frac{1}{2}(y_P + y_Q)$,

$\therefore \frac{m}{m+4} + 3 = \frac{1}{2}(-m^2 - 2m + 3 + m + 3)$,

解得: $m = -3$ (舍去) 或 -2 ,

即点 $P(-2, 3)$;

当 $PQ = QH$ 时, 即 $\sqrt{2}(\frac{m}{m+4} - m) = -m^2 - 3m$,

解得: $m = -3$ 或 $-4 - \sqrt{2}$ (均舍去),

综上, 点 P 的坐标为: $(-2, 3)$.